MATHS II (M')

DURÉE : 4 heures

Comme de coutume $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels à une indéterminée.

I

1° Pour quelle valeur du paramètre réel N l'équation différentielle

$$(E) \qquad N y - (2x + 1) y' - (x^2 + x) y'' = 0$$

a-t-elle une solution polynomiale de degré n sur $\mathbb{R}$?

Pour cette valeur de N démontrer qu'il existe un unique polynôme P_n de degré n dont la fonction polynomiale est solution de (E) et vérifie $P_n(0) = 1$.

2° Expliciter P_0, P_1, P_2 et P_3.

3° Exprimer les coefficients de P_n à l'aide de coefficients binomiaux.

II

1° Vérifier que l'application $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi(P) = \int_{-1}^{0} P^2(x)\, dx$$

est une forme quadratique positive non dégénérée.

Tournez la page S. V. P.

2° Démontrer que pour tous entiers m et n positifs ou nuls distincts, on a :

$$\int_{-1}^{0} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0$$

$\left(\text{pour cela on pourra calculer l'intégrale : } \int_{-1}^{0} P_n'(x)\, P_m'(x)\, dx\right)$.

3° Que vaut

$$\int_{-1}^{0} P_n(x)\, Q(x)\, dx$$

lorsque Q est un polynôme de degré inférieur à n ?

En déduire que P_n a n zéros distincts dans $]-1, 0[$.

4° Démontrer que $P_n(-X-1) = (-1)^n P_n$; en déduire $P_n(-1)$.

5° Démontrer que pour $n \geqslant 1$ on a l'égalité :

$$(n+1) P_{n+1} + n P_{n-1} = (2n+1) P_1 P_n.$$

En déduire que les zéros de P_n séparent ceux de P_{n+1} (c'est-à-dire s'intercalent entre ceux de P_{n+1}).

6° Démontrer que

$$\int_{-1}^{0} P_n(x)\, P_m'(x)\, dx$$

vaut 2 si $m - n$ est impair et positif, et vaut 0 sinon.

7° Démontrer que pour $n \geqslant 0$ on a l'égalité :

$$P'_{n+2} - P'_n = (4n+6) P_{n+1}.$$

En déduire que :

$$(n+2)(n+1)(P_{n+2} - P_n) = (4n+6)(X^2 + X) P'_{n+1}.$$

8° Calculer $\Phi(P_n)$ pour $n \geqslant 0$.

ENSET 81

-127-

9° Donner la matrice M_n de la restriction Φ_n de Φ à l'espace vectoriel des polynômes nuls ou de degré inférieur à n dans la base $(1, X, \ldots, X^{n-1})$, puis la matrice R_n de Φ_n dans la base $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1})$.

Calculer le déterminant de M_n.

Démontrer que les coefficients de M_n^{-1} sont tous entiers.

10° Expliciter la matrice inverse de :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

III

1° Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans lui-même : $t \longmapsto -\frac{1}{e^t + 1}$.

On pose $F_n = P_n(f)$.

Vérifier qu'il existe un réel λ_n, que l'on précisera en fonction de n, tel que :

$$F_n'' + \lambda_n f' F_n = 0$$

2° Étudier les variations de :

$$\frac{1}{f'} F_n'^2 + (n^2 + n) F_n^2.$$

En déduire que $|P_n(x)| \leqslant 1$ pour $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

3° Démontrer que la série de terme général $P_n(x)\, t^n$ converge pour

$$-1 \leqslant x \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad |t| < 1.$$

Démontrer que sa somme g vérifie l'équation différentielle :

$$(1 - 2(1 + 2x)\, t + t^2)\, g_t' - (1 + 2x - t)\, g = 0.$$

4° Calculer g.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail